12 METRİKLENEBİLME

Bu bölümde, ne zaman bir topolojik uzay metrik uzaydır sorusuna cevap arayacağız.

Tanım: $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayında, bir d metriği tanımlanabilir ve bu metrik ile doğrulan topoloji $\mathcal{T}$'ya eşit olursa, bu uzaya <u>metriklenebilir</u> denir.

Bu tanımı, şöylede verebiliriz: Bir topolojik uzay, bir metrik uzaya homeomorfik ise, metriklenebilir denir.

Soru: Bir uzay, ne zaman metriklenebilir? Veya, başka bir deyişle, hangi tür uzaylar metriklenebilir?

Örnekler: 1) $(X,\mathcal{T})$ diskrit uzayı metriklenebilir. Gerçekten, $d: X\times X \to \mathbb{R}$, $d(x,y)=\begin{cases}1 ; & x\neq y\\ 0 ; & x=y\end{cases}$ ile tanımlayalım. $0<\varepsilon\leq 1$ için $B_\varepsilon(x)=\{y\in X \mid d(x,y)<\varepsilon\}=\{x\}$ olduğundan tek elemanlı kümeler açıktır. Keyfi A kümesi, $A=\bigcup_{x\in A}\{x\}$ yazılabileceğinden açıktır. Yani, d ile üretilen topoloji diskrit topolojidir.

2) Herhangibir metrik uzay T_4-uzay olduğundan, T_4-uzay olmayan $(X,\mathcal{T})$ topolojik uzayları metriklenemez.

3) $(\mathbb{R},\mathcal{T}_S)$ Sorgenfrey doğrusu T_4-uzay olduğu halde metriklenemez. $(\mathbb{R},\mathcal{T}_S)$ ayrılabilir, fakat ikinci sayılabilir değildir.

Teorem: $\{(X_n,d_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ikinci sayılabilir metrik uzaylar ailesi olsun. $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ çarpım uzayı, ikinci sayılabilir ve metriklenebilirdir.

Kanıt: Her $n\in\mathbb{N}$ için, β_n, d_n ile üretilen $\mathcal{T}_n$ topolojisi için bir sayılabilir baz olsun. $\beta=\{\prod_{n\in\mathbb{N}} V_n \mid$ sonlu sayıda $V_n\in\beta_n$, $V_n\neq X_n$ dışında $V_n=X_n$ olsun$\}$ alalım. β sayılabilirdir ve $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ için bir bazdır. Bu yüzden, $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ ikinci sayılabilirdir. x ve y, $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$'nin herhangi iki elemanı olsun. x ve y'nin n. koordinatlarını sırasıyla x_n ve y_n ile gösterelim. $d'(x_n,y_n)=\min(d_n(x_n,y_n),1)$ olarak tanımlayalım. d', X_n üzerinde bir metriktir ve d_n'e denktir. $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ üzerinde, d'yi

$$d(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{d'(x_n,y_n)}{2^n}$$

olarak tanımlayalım. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$ serisi ile kıyaslandığında $d(x,y)$, her x ve y için tanımlıdır. d'nin $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ üzerinde bir metrik olduğunun sağlanması yapılabilir.

Bu metrik ile üretilen topoloji, çarpım topolojisinin aynısıdır. d ile üretilen topolojinin, çarpım topolojisi olduğu, çalışma sorusu olarak bırakılmıştır. ■

Sonuç: $\prod_{n\in\mathbb{N}} [0,1]$ çarpım uzayına Hilbert küpü denir. (Çoğu kaynakta, Hilbert küpü $\prod_{n\in\mathbb{N}} [0,1/n]$ olarak tanımlanır.) Hilbert küpü, ikinci sayılabilir ve metriklenebilirdir.

Teorem: $(X,\mathcal{T})$ T_1-uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

a) X düzenli ve ikinci sayılabilirdir.

b) X ayrılabilir ve metriklenebilirdir.

c) X, $\prod_{n\in\mathbb{N}} [0,1]$ çarpım uzayının (Hilbert küpü), bir altuzayına homeomorfiktir.

Kanıt: (c) $\Rightarrow$ (b) Yukarıdaki sonuçtan elde edilir.

(b) $\Rightarrow$ (a) Her metrik düzenlidir. (T_3-uzaydır.) Metrik uzaylarda ayrılabilirlik ve ikinci sayılabilirlik denktir. Buna göre, ayrılabilir ve metriklenebilir uzay düzenli ve ikinci sayılabilirdir.

(a) $\Rightarrow$ (c) Çalışma sorusu. ■

Sayılabilir açık yoğun kümelerin kesişimi, daima yoğun ise bu uzaylara, <u>Baire uzayları</u> denir. (Örneğin, yerel kompakt Hausdorff uzay Baire uzaydır.)

Bu konunun devamı olarak, tam metrik uzaylar ve Baire kategori teoremi ödev olarak bırakılmıştır.

Umarım, bu ders sonunda, hayata bakış açınızda değişiklikler olmuştur. Hayatta, sağlık ve mutluluk yanınızda olsun.

12.02.2016